LEZIONE 6 CONT.

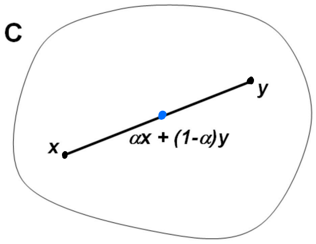
DEFINIZIONE DI INSIEME CONVESSO

- DATO L'INSIEME NON VUOTO $C \subseteq \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE C È <u>UN INSIEME CONVESSO</u> SE:

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in C \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0,1] \implies \text{COMBINAZIONE CONVESSA}$$

- IN ALTRE PAROLE: C È CONVESSO SE PER OGNI COPPIA DI PUNTI $\in C$, ANCHE IL SEGMENTO CHE LI UNISCE È CONTENUTO IN C.

ESEMPIO VISIVO:



- IL SEGMENTO CHE CONGIUNGE I PUNTI x ED y È L'INSIEME DEI PUNTI $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, AL VARIARE DI $\alpha \in [0,1]$
- $\left.\begin{array}{l} \alpha = 0 \to \text{TORNA } y \\ \alpha = 1 \to \text{TORNA } x \end{array}\right\}$ TUTTI GLI ALTRI VALORI DI ALFA DARANNO I VALORI INTERMEDI NEL SEGMENTO TRA $\alpha =]0,1[$

$\alpha = 0,5 \to$ PUNTO IN MEZZO

↳ I PUNTI x ED y POSSIAMO VEDERLI ANCHE COME VETTORI CHE PARTONO DALL'ORIGINE E ARRIVANO AD x E y.

NOTA: SE PRENDO UN SEGMENTO COME INSIEME, IL SEGMENTO È UN INSIEME CONVESSO

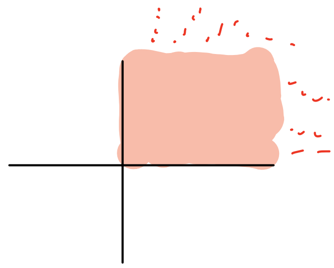
NOTA: SE PRENDO UN SOLO PUNTO, PRENDO $x = y$ E QUINDI È UN INSIEME CONVESSO

NOTA: L'INSIEME VUOTO <u>NON VIOLA</u> LE CONDIZIONI DI INSIEME CONVESSO, QUINDI VIENE CONSIDERATO AUTOMATICAMENTE CONVESSO

ESEMPIO

- $\mathbb{R}^2$

SIA L'INSIEME $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\} \to$



PRENDO 2 PUNTI QUALUNQUE: $A = (x_1, y_1)$ $B = (x_2, y_2) \in C$

ALLORA: $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

PRENDENDO UN QUALUNQUE $\alpha \in [0,1]$:

$$P = \alpha \overset{x}{A} + (1-\alpha) \overset{y}{B} = \Big[\underbrace{\alpha x_1}_{\substack{\text{POSITIVO} \\ \cdot \\ \text{POSITIVO} \\ \| \\ \text{POS.}}} + \underbrace{(1-\alpha)}_{\substack{1 - \text{N° TRA } [0,1] \\ \| \\ \text{POSITIVO}}} \overbrace{x_2}^{\text{POS.}},\ \underbrace{\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2}_{\text{SEMPRE POS.}}\Big]$$

P VARIA IN BASE A $\bar{x}, \bar{y}$ E α

$= [x, y] \to$ ENTRAMBI SEMPRE ≥ 0, ALLORA È CONVESSO C, $\forall x, y \in C \wedge \forall \alpha \in [0,1]$

- $\mathbb{R}^3 \to$ STESSA COSA, SOLO CHE AVREI PER ESEMPIO:

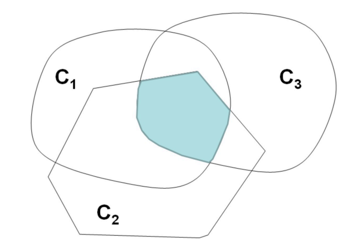
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\} \implies P = \Big[\underbrace{\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2}_{x},\ \underbrace{\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2}_{y},\ \underbrace{\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2}_{z}\Big] \in \mathbb{R}^3$$

PROPOSIZIONE: INTERSEZIONE INSIEMI CONVESSI

SE HO $m \geq 1$ INSIEMI CONVESSI, LA LORO INTERSEZIONE È CONVESSA:

$C = C_1 \cap \ldots \cap C_m$

ESEMPIO GRAFICO:



- A DIFFERENZA DELL'INTERSEZIONE, L'UNIONE TRA INSIEMI CONVESSI <u>PUÒ</u> NON ESSERE CONVESSA
- L'INTERSEZIONE TRA VARI INSIEMI CONVESSI PUÒ DARE COME RISULTATO L'INSIEME VUOTO CHE A SUA VOLTA È CONVESSO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONVESSA

Definizione 5.2 *Data la funzione $f(x)$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dato l'insieme non vuoto convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che la funzione $f(x)$ è* **convessa sull'insieme** C, *se per ogni coppia di punti $x, y \in C$, risulta verificata la seguente proprietà*

$$f[\alpha x + (1-\alpha)y] \;\leq\; \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \qquad \forall \alpha \in [0,1].$$

La funzione $f(x)$ si dice **strettamente convessa** *su C qualora la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto con $x \neq y$ e $\alpha \in (0,1)$.*

- LA FUNZIONE DEVE ESSERE CONVESSA SU UN INSIEME C CONVESSO.
- STRETT. CONVESSA SE $<$ ANZICHÉ $\leq$

ESEMPIO

$f(x) = x^2$ È CONVESSA ?

PRENDO 2 PUNTI A CASO E α IN MEZZO: $x = 1$, $y = 3$, $\alpha = 0.5$

PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO

CALCOLO PUNTO MEDIO: $\alpha x + (1-\alpha) y = 0.5 \cdot 1 + (1 - 0.5) 3$

$= 0.5 + 1.5 = 2$

$f(2) = (2)^2 = 4$

CALCOLO SECONDO MEMBRO: $\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) = 0.5 \cdot f(1) + 0.5 \cdot f(3) = 5$

ALLORA: $4 \leq 5 \to$ SÍ, ALLORA PER QUEI x, y ABBIAMO VERIFICATO.

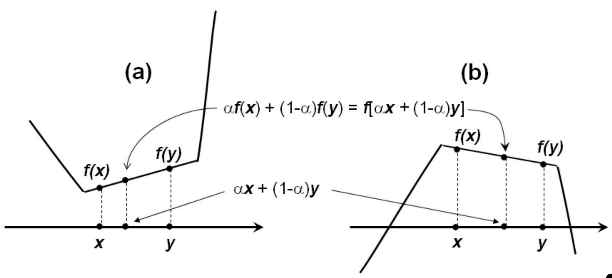
$f''(x) < 0$ CONCAVA

- PER MOSTRARE CHE È CONVESSA $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ MI BASTA TROVARE $f''(x)$ E SE È ≥ 0 ALLORA É CONVESSA $\ddot{\cup}$

$\hookrightarrow$ A 2 VARIABILI ($\mathbb{R}^2$)
- SE $f_{xx} \geq 0 \wedge \det(H) \geq 0$ ALLORA È CONVESSA (SEMIDEFINITA POSITIVO)
- SE $f_{xx} > 0 \wedge \det(H) > 0$ STRETTAMENTE CONVESSA
- SE $\det(H) < 0 \to$ NÉ CONCAVA NÉ CONVESSA (PUNTO DI SELLA)
- SE $f_{xx} < 0 \wedge \det(H) > 0$ ALLORA È CONCAVA $\ddot{\cap}$

DISEGNO DI UNA FUNZIONE CONVESSA (a) E UNA CONCAVA (b)

NON DERIVABILE OVUNQUE



- NOTARE CHE UNA FUNZIONE PUÒ ESSERE CONVESSA / CONCAVA ANCHE SE HA DEI PUNTI NON DERIVABILI

$\hookrightarrow$ ESEMPIO: $|x| \to$ SO CHE $f''(x) \geq 0$ SIA PER $x > 0$ SIA PER $x < 0$, COME CONTROLLO $x = 0$?

$\Downarrow$

PASSO 1

$x_1 < x_0 < x_2 \quad \to x_1 = -1, \; x_2 = 1, \; x_0 = 0$

LATO SX

$$\frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = -1 \qquad \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

$-1 \leq 1$ ✓

PASSO 2

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

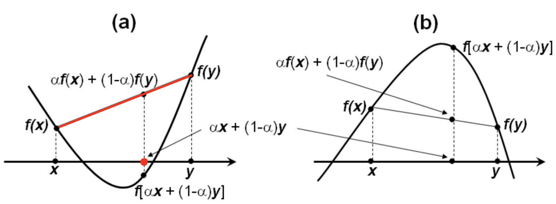
$f'_+(0) \geq f'_-(0) \Rightarrow 1 \geq -1$ ✓

NON È STRETTA PERCHÉ I PUNTI TRA x ED y COINCIDONO CON IL SEGMENTO QUINDI ABBIAMO BISOGNO DI $\leq$ OPPURE $\geq$

$\hookrightarrow$ CIOÉ $f[\alpha x + (1-\alpha)y] = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

DISEGNO FUNZIONE CONVESSA (a) STRETTA E CONCAVA (b) STRETTA

DERIVABILI OVUNQUE



CON $f[\alpha x + (1-\alpha)y]$

$\to$ TUTTI I PUNTI TRA x E y SI TROVANO STRETTAMENTE SOTTO AL SEGMENTO CHE CONGIUNGE $\underbrace{f(x) \text{ E } f(y)}$

$\hookrightarrow$ CON $\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

LEZIONE 7

• LA STESSA IDENTICA COSA DELLE FUNZIONI / INSIEMI CONVESSI VALE ANCHE PER QUELLE CONCAVE. BASTA ROVESCIARE IL SEGNO $\overset{<}{\leq}$ IN $\overset{>}{\geq}$

LEMMA 5.1 (RIBALTAMENTO CONCAVA / CONVESSA)

DATA LA FUNZIONE $f(x)$ CON $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; DATO L'INSIEME NON VUOTO CONVESSO $C \subseteq \mathbb{R}^n$, SE $f(x)$ È CONVESSA SU C ALLORA LA FUNZIONE $g(x) = -f(x)$ È CONCAVA SU C

↳ FUNZIONA ANCHE AL CONTRARIO C: CONCAVO $\setminus \{\emptyset\}$, $f(x)$ CONCAVA SU $C \Longrightarrow g(x) = -f(x)$ È CONVESSA

PROPOSIZIONE 5.2

DATA LA FUNZIONE $g(x)$, CON $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ED AFFINE, ALLORA $g(x)$ È AL CONTEMPO CONCAVA E CONVESSA SU $\mathbb{R}^n$

↳ SOMMA TRA FUNZIONE LINEARE + COSTANTE

↳ LA FUNZIONE AFFINE SODDISFA LE DEFINIZIONI DI CONCAVITÀ / CONVESSITÀ UNENDO $\leq + \geq = ⊜$. IMPOSSIBILE AVERE STRETTAMENTE: $< + > = \emptyset$

• NOTE

↳ $f''(x) = 0 \quad \forall x \in D_f$ → AFFINE → SIA CONCAVA CHE CONVESSA

↳ $f''(x)$ CAMBIA SEGNO (ES. $f''(x) = 6x$) → NÉ CONCAVA NÉ CONVESSA

↳ $f(x,y)$ È CONCAVA E CONVESSA ALLO STESSO TEMPO SE LA MATRICE HESSIANA ASSOCIATA È TUTTA NULLA → $f(x,y)$ È AFFINE

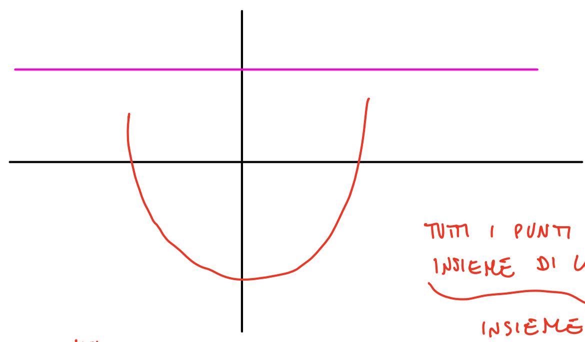
↳ UNA FUNZIONE AFFINE SODDISFA NECESSARIAMENTE $f(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$, QUINDI È SEMPRE SIA CONCAVA CHE CONVESSA (NON IN SENSO STRETTO) $\Longrightarrow$ NON PUÒ ESSERE UNA DELLE DUE O NESSUNA DELLE DUE

DEFINIZIONE DI INSIEME DI LIVELLO

Proposizione 5.3 *Data la funzione $f(x)$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia $f(x)$ convessa su $\mathbb{R}^n$. Allora l'***insieme di livello** *(eventualmente vuoto) $\mathcal{L}_\gamma$ definito mediante la*

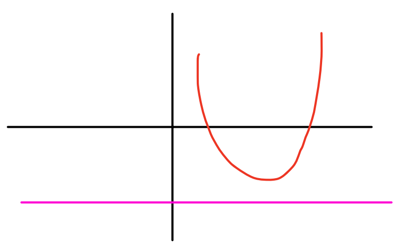
$$\mathcal{L}_\gamma \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \gamma\}$$

è convesso per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.



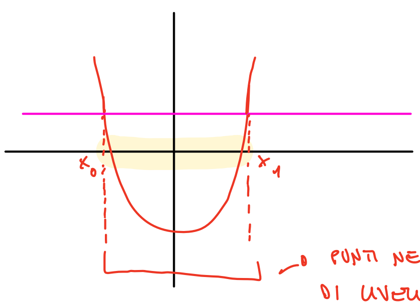
TUTTI I PUNTI INSIEME DI LIVELLO

$\underbrace{\hphantom{TUTTI I PUNTI INSIEME}}_{\text{INSIEME CONVESSO}}$

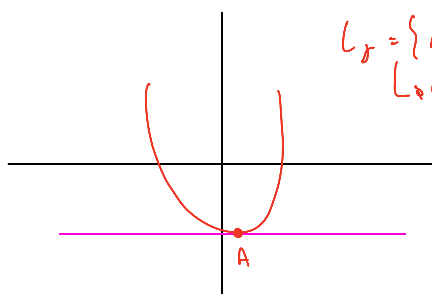


NESSUN PUNTO NELL'INSIEME DI LIVELLO = $\emptyset$ → CONVESSO

INSIEME DI LIVELLO



→ PUNTI NELL'INSIEME DI LIVELLO: $[x_0, x_1]$ } INSIEME CONVESSO



$L_\gamma = \{A\}$

↳ INSIEME CONVESSO

• SE SCELGO UN QUALSIASI LIVELLO SU UNA FUNZIONE CONVESSA, ANCHE L'INSIEME DI LIVELLO SARÀ CONVESSO

• SE HO UN INSIEME DI LIVELLO CONVESSO, NON È DETTO CHE LA FUNZIONE LO SIA

DEFINIZIONE DI CURVA DI LIVELLO

Definizione 5.4 *Data la funzione $f(x)$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ed il parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, definiamo* **curva di livello** *$c_\gamma(x)$ della $f(x)$, l'insieme (eventualmente vuoto)*

$$c_\gamma(x) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \gamma\},$$

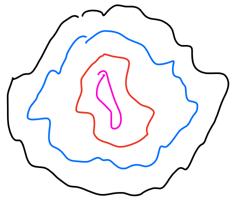
al variare di γ. □

• NON NECESSARIAMENTE PUNTI CONVESSI

• LO SCOPO DELLA CURVA È TROVARE TUTTI I PUNTI $\overbrace{x, y, z \ldots}^{\text{IN BASE ALLA DIM. DELLO SPAZIO}}$ PER CUI $f(\bar{x}) = \gamma$ → CAPIRE DOVE NELLO SPAZIO LA FUNZIONE ASSUME UN CERTO VALORE FISSO γ

↳ ESEMPIO :

MAPPA TOPOGRAFICA DELLA MONTAGNA $\longrightarrow$ OGNI CERCHIO RAPPRESENTA UNA CURVA DI LIVELLO $\longrightarrow$ AL VARIARE DI γ, VARIA LA CURVA CHE SCELGO :



- LE CURVE RAPPRESENTANO TUTTI I PUNTI IN CUI LA FUNZIONE HA LO STESSO VALORE (COLORE).
  ↳ SCELTO UN γ (COLORE) AVRÒ TUTTI I PUNTI CHE SI TROVANO ALLA STESSA ALTEZZA

↳ A DIFFERENZA DELL'INSIEME DI LIVELLO, SE $f(x)$ È CONVESSA NON È DETTO CHE LA CURVA DEFINITA SU DI ESSA SIA A SUA VOLTA CONVESSA

LEZIONE 8

TEOREMA 5.1

Teorema 5.1 *Dato l'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, siano $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, funzioni convesse su C. Siano dati i coefficienti $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, allora le funzioni*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x), \Big] \text{ COMB. CONICA}$$

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i f_i(x)\},$$

sono convesse su C.

- NOTA : SOMMA DI FUNZIONI CONVESSE $\longrightarrow$ È CONVESSA
  $f(x) = \underbrace{x^2}_{\text{CONV.}} + \underbrace{x}_{\text{CONV.}} \Longrightarrow$ CONVESSA
  ↳ STIAMO DICENDO CHE LA SOMMA DI FUNZIONI A COEFF. ≥ 0 DÀ COME RISULTATO UNA FUNZIONE CONVESSA

↓

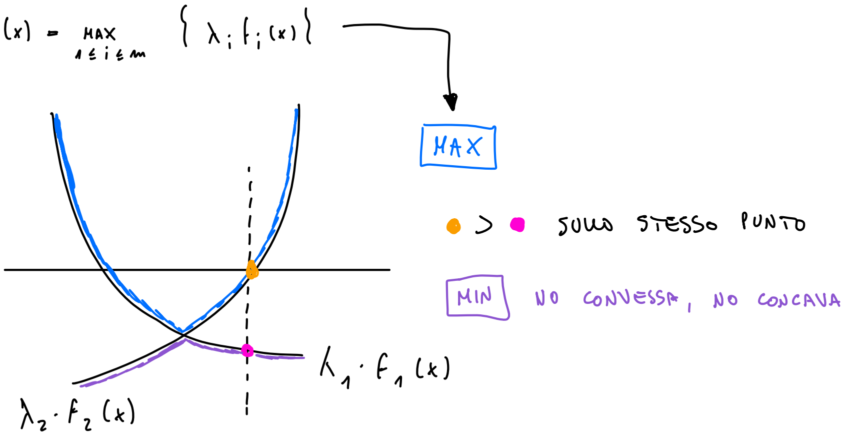
ESEMPIO ESPLICATIVO

$f_1(x), \dots\dots, f_m(x)$ SUPPONIAMO CONVESSE SU C (CHE È CONVESSO)

$\{\lambda_i\}$ $\lambda_i \geq 0$ $\forall i$

$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ $\longrightarrow$ SE AVESSI TUTTI $\{\lambda_i\} = 1$, ALLORA AVREI SEMPLICEMENTE UNA SOMMA DI m FUNZIONI CONVESSE CHE FORMERANNO A LORO VOLTA UNA FUNZIONE CONVESSA

$g(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i f_i(x)\}$



- NOTA : UNA FUNZIONE CONVESSA MOLTIPLICATA PER -1 DÀ COME RISULTATO UNA FUNZIONE CONCAVA E VICEVERSA
- NOTA : IL MIN TRA FUNZIONI CONCAVE È A SUA VOLTA CONCAVA :

$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \Longrightarrow F(x)$ CONCAVA $\Longleftarrow$ $\min_{1 \leq i \leq m} (\alpha_i f_i(x))$

PER OGNI $\alpha_i \geq 0$, RICORDA CHE UNA FUNZIONE COSTANTE (ES. NULLA) È SIA CONVESSA CHE CONCAVA
PER OGNI $f_i(x)$ CONCAVA

- NOTA : TUTTE LE FUNZIONI COSTANTI, LINEARI ED AFFINI SONO SIA CONVESSE CHE CONCAVE

ESEMPIO :

$f(x) = \underset{\text{CONV.}}{x^2} + \underset{\text{CONV.}}{(-\sin(x))}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ È SOMMA DI FUNZIONI CONVESSE, ALLORA ANCH'ESSA È CONVESSA (CON $\alpha_i \geq 0 \ \forall_i$)

↳ SE SCRIVESSI $f(x) = x^2 - \sin(x)$ NON POTREI USARE IL TH. 5.1 PER DIRE CHE È CONVESSA, PERCHÉ HO UN $\alpha_i < 0$, QUINDI FACCIO LA DERIVATA SECONDA E CAPISCO SE È CONCAVA | CONVESSA

↳ SE $f''(x)$ CAMBIA DI SEGNO IN BASE A UNA VARIABILE, NON È NÉ CONVESSA NÉ CONCAVA: IN ALCUNI INTERVALLI È DI UN TIPO, IN ALTRI DI UN ALTRO TIPO

PROPOSIZIONE 5.5

Proposizione 5.5 *Sia dato l'insieme convesso non vuoto $C \subseteq I\!R^n$ e sia $f : I\!R^n \to I\!R$ due volte continuamente differenziabile su un aperto contenente C. Allora $f(x)$ è* **convessa** *su C se e solo se $\forall x, y \in C$ è soddisfatta una qualsiasi delle seguenti condizioni:*

1. $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$
2. $[\nabla f(y) - \nabla f(x)]^T(y - x) \geq 0$
3. $(y - x)^T \overset{\text{HESSIANA}}{\nabla^2 f(x)}(y - x) \geq 0.$

Inoltre la funzione $f(x)$ è **strettamente convessa** *su C se e solo se le disuguaglianze nelle prime due relazioni sono verificate in senso stretto, per ogni punto $y \in C$, $y \neq x$.*

- UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE NON È DETTO CHE SIA CONCAVA | CONVESSA
- " " CONVESSA | CONCAVA " " " " " DIFFERENZIABILE

1 DEVE ESSERE VERA ANCHE CON LE X AL POSTO DELLE Y E VICEVERSA:
↳ $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)$

- IN SINTESI: LA FUNZIONE DEVE STAR SOPRA (O COINCIDERE) CON PIANO TANGENTE, CIOÈ CRESCERE RISPETTO A P. TANG. E QUESTO SUCCEDE SE $\nabla^2 f(x) \geq 0$

↳ SE È VERIFICATA UNA QUALSIASI DELLE 3 CONDIZIONI ALLORA LA FUNZIONE È CONVESSA, MENTRE SE UNA FUNZIONE È CONVESSA ALLORA TUTTE E 3 LE CONDIZIONI SONO SODDISFATTE

↳ DI CONSEGUENZA, SE UNA PROPRIETÀ È SODDISFATTA, ALLORA TUTTE SON SODDISFATTE

- NOTA: $f(x), g(x) \geq 0$
$[f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] \geq 0 \quad \forall x, y \in \overset{\text{INS. CONVESSO}}{C} \subseteq I\!R^n$, ALLORA $h(x) = f(x)\,g(x)$ È CONVESSA SU C

- RELAZIONE TRA TH. VALOR MEDIO (TAYLOR 2° ORDINE) E PROP. 5.5

↳ IL TH. CI AIUTA A CAPIRE QUANTO VALE $f(y)$ VICINO AD x: IL GRADIENTE MI DICE QUANTO VELOCEMENTE CRESCE LA FUNZIONE
LA HESSIANA MI DICE QUANTO È CURVA IN QUELLA DIREZIONE

↳ LA PROP. CI DICE QUANDO UNA FUNZIONE È CONVESSA: USA LA FORMULA DEL TH. DEL VALOR MEDIO: GUARDA SE (1) $f(y)$ È $\geq$ DELLA PRIMA PARTE DELLA FORMULA DI TAYLOR (CIOÈ SE STA SOPRA O CONICIDE CON PIANO TANGENTE) E POI VERIFICA LA PARTE QUADRATICA (3) SE È POSITIVA.

↳ $\nabla^2 f(x)$:
$\geq 0 \Rightarrow$ CONVESSA
$> 0 \Rightarrow$ STRETTAMENTE CONVESSA
$<, \leq, = 0 \Rightarrow$ NON CONVESSA

(2) USANDO LA DIREZIONE $x \to y$ (QUINDI $y - x$, ANDANDO DA SINISTRA A DESTRA) DEVO AVERE CHE IL GRADIENTE AUMENTA ($\nabla f(y) > \nabla f(x)$), PERCHÉ SE RIMANESSE UGUALE SAREBBE LINEARE, SE DIMINUISSE NON SAREBBE CONVESSA

PROPOSIZIONE 5.6

Proposizione 5.6 *Data la funzione $f(x)$, con $f : I\!R^n \to I\!R$, e l'insieme convesso $C \subseteq I\!R^n$. Sia $f(x)$ convessa su C. Allora, ogni punto di minimo locale $x^* \in C$, per il problema di programmazione matematica*

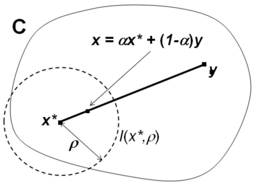
$$\min_{x \in C} f(x)$$

è anche un punto di minimo globale per lo stesso problema.

- QUANDO TROVO UN MINIMO LOCALE IN UN CERTO INTORNO I, DA QUEL PUNTO IN POI LA $f(x)$ PUÒ SOLO SALIRE, NON HA BUCHI E NON PUÒ ANDARE SU E GIÙ. PUÒ SOLO SALIRE O RIMANERE UGUALE
PRIMA DI QUEL x^*, LA FUNZIONE POTEVA SOLO DECRESCERE.

- PER DEFINIZIONE E PER LA SUA FORMA, SE TROVO UN MINIMO QUELLO È UNICO E QUINDI È GLOBALE.
- CORNER CASE: e^x È CONVESSA, MA $\min f(x) \nexists$ PERCHÉ IL VAL. PIÙ PICCOLO CHE ASSUME È ZERO (SENZA RAGGIUNGERLO, PER $x \to -\infty$).
- TEOREMA WEIERSTRASS: f FUNZIONE CONTINUA SU I CHIUSO E LIMITATO $[a, b] \subset I\!R$, ALLORA:
↳ f ASSUME MIN. GLOBALE SU $[a, b]$, CIOÈ ESISTE UN PUNTO $x_0 \in [a, b]$ TALE CHE $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$
↳ f " MAX. " " " " " " " $x_1 \in [a, b]$ " " $f(x_1) \geq f(x)$ " "

LEZIONE 9



→ PER DIM. PROPOSIZIONE 5.6

- QUALSIASI PUNTO $x \in \widehat{x\,y}$ SARÀ $f(x) \geq f(x^*)$ DATA f CONVESSA E C CONVESSO.

PROPOSIZIONE 5.7

Proposizione 5.7 *Data la funzione $f(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e l'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $f(x)$ convessa su C. Allora, l'insieme delle soluzioni del problema di programmazione matematica*

$$\min_{x \in C} f(x),$$

formano un insieme convesso.

- SE $f(x)$ È CONVESSA, ALLORA AVRÀ SOLO 1 PUNTO COME SOLUZIONE, CHE A SUA VOLTA FORMA UN INSIEME CONVESSO $C = \{x_0\}$ CON $x_0 = \min f(x)$
- SE $f(x)$ È LINEARE, ALLORA AVRÀ TUTTI I PUNTI DELLA RETTA CHE SONO MINIMI GLOBALI. TUTTI QUESTI PUNTI FORMANO UN INSIEME CONVESSO (PRENDENDO INTERVALLO / SEGMENTO ∈ RETTA)

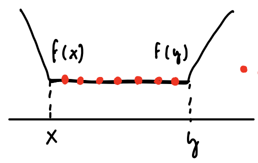
- SE PRENDO x^* E y^* MIN. GLOBALI, ALLORA DEVO AVERE NECESSARIAMENTE CHE TUTTI I PUNTI NEL MEZZO TRA I DUE MINIMI APPARTENGANO ALL'INSIEME PER RENDERLO CONVESSO

- DIMOSTRAZIONE:

$f(x^*) = f(y^*) = f_{min} \in \mathbb{R}$

$\alpha \in [0,1]$

ES. 1 VARIABILE



• $\alpha x + (1-\alpha) y$ con $\alpha \in [0,1]$

$$f(x) = f[\alpha x^* + (1-\alpha) y^*] \leq \underbrace{\alpha f(x^*) + (1-\alpha) f(y^*)}_{\alpha f_{min} + (1-\alpha) f_{min}} = f_{min}$$

↳ CONFERMIAMO CHE $\forall x \in I = [x^*, y^*]$, VALE $f(x) \leq f_{min} \Rightarrow f(x) = f_{min}$